Alameda 3363
Estación Central-Santiago
Tel. +56 2 7180765
www.usach.cl

Universidad de Santiago de Chile

Departamento de Economía

Documentos Docentes

Introducción a los Métodos de Experimentación Computacional: Simulación y Calibración

Autor: Christian J. Medina

DD 1995 - Nº 01

1. INTRODUCCION.

Este artículo tiene por objeto familiarizar al lector con algunos de los métodos de calibración y simulación que son utilizados actualmente en el campo del estudio de los modelos macroeconómicos. El propósito fundamental es capacitar al lector para que este realize por sí mismo las calibraciones y simulaciones presentadas, de manera de entregar una base sólida para que este sea capaz de aplicar la metodología a problemas de interés particular para el investigador.

Se asume que el lector posee algún grado de conocimiento en programación, ya sea en C, C++, FORTRAN, GAUSS, MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, u otro lenguaje afín. Además se requiere que el lector esté familiarizado con métodos de programación dinámica al nivel de Sargent (1987), Hansen y Sargent (1993), o Stokey y Lucas con Prescott (1989).

El artículo está organizado en tres secciones. En la primera sección se presenta el modelo básico ("the benchmark economy") y la solución de esta economía desde el punto de vista del planificador social benevolente. Se introducen conceptos como "Ecuación de Bellman" y "Policy Function", ambos aplicados al modelo bajo análisis. La segunda sección introduce el dinero á la Cash-in-Advance, con lo cual el problema del consumidor estaría incorporando una distorción en sus parámetros decisionales. Finalmente, se discuten dos métodos de calibración y simulación, ambos de fácil y rápida implementación en un computador. El primero corresponde al método de equilibrios recursivos presentado en

Kydland (1989), Kydland y Prescott (1982), McGrattan (1990), McGrattan (1994), y Johnson (1994), mientras el segundo corresponde al método desarrollado por Den Haan y Marcet (1990) y (1994), y Marcet (1991). Un volumen especial sobre diversos métodos numéricos de solución de modelos de expectativas racionales no lineales fue editado en el *Journal of Business and Economic Statistics* a principios de 1990[1], y una discusión econométrica sobre los métodos de simulación y calibración de modelos de equilibrio general se presentan en Kydland y Prescott (1991) y (1994).

2. MODELO BASICO DE CICLOS REALES.

Aquí se presenta el modelo básico, el cual consiste en una economía con un agente racional y representativo, en un mundo sin distorciones, lo cual nos permite la aplicación del segundo teorema del bienestar directamente en la resolución del problema. Así, el agente (planificador benevolente) maximiza:

$$\underset{\{c,k'\}}{Max}\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau}$$

$$s.a. \qquad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = \theta_t k_t^{\alpha} \tag{1}$$

$$k_0 \quad dado$$

[1]Revisar en especial a Taylor y Uhlig (1990). En este artículo, ellos presentan un modelo de crecimiento estocástico y la comparación de los distintos métodos numéricos utilizados por los autores para resolver este mismo problema.

donde c_t denota consumo, k_{t+1} stock de capital, el cual se deprecia a una tasa δ. El factor de descuento subjetivo está dado por β, el cual es positivo y menor a uno. El coeficiente de aversión relativa al riesgo (CRRA) está dado por τ, mientras que la elasticidad empleo-producto está dada por $\alpha \in (0,1)$. El shock tecnológico sigue un proceso estocástico autoregresivo de primer orden (en logaritmo natural), o un AR(1):

$$\ln \theta_t = \rho \ln \theta_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

donde ε_t es una variable aleatoria normalmente distribuída, y serialmente no correlacionada, con media 0 y varianza constante $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$.

El problema a resolver por el investigador se resume en las ecuaciones (1) y (2), teniendo en cuenta el proceso estocástico que sigue el error de la ecuación de proyección del logaritmo del shock.

Para fines de comparación, resolvamos el problema (1)-(2) del agente considerando que existe depreciación completa (δ=1) y que sus preferencias son logarítmicas (τ=1). La ecuación de Bellman para el agente representativo será:

$$v(k,\theta) = \underset{c,k'}{Max} \{ u(c) + \beta \int v(k',\theta') f(\theta',\theta) d\theta' \}$$

$$\begin{aligned} c + k' &\leq \theta' k^{\alpha} \\ \ln \theta' &= \rho \ln \theta + \varepsilon' \end{aligned} \tag{3}$$

Al incorporar la restricción de flujo (restricción presupuestaria) dentro de la ecuación de Bellman, el problema se reduce a encontrar el stock de capital óptimo que resuelve (3):

$$v(k,\theta) = \underset{k'}{Max} \{ u(\theta' k^{\alpha} - k') + \beta \int v(k',\theta') f(\theta',\theta) d\theta' \} \quad \textbf{(4)}$$

donde los procesos para θ y ε siguen siendo los mismos de la ecuación (3).

Este problema de programación dinámica se resuelve obteniendo las condiciones de primer orden (en este caso solo la correspondiente al stock de capital), en conjunto con la condición de la envolvente (Benveniste y Scheinkman (1979))[2]. Estas condiciones se obtienen derivando la ecuación de Bellman (4) con respecto al stock de capital del próximo período y al stock de capital de este período, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(k,\theta)}{\partial k'} &= -u'(c(k',\theta')) + \beta \int \frac{\partial v(k',\theta')}{\partial k'} f(\theta',\theta) d\theta' = 0 \\ \frac{\partial v(k,\theta)}{\partial k} &= u'(c(k',\theta'))\theta' k^{\alpha} \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

Al solucionar este problema por el método de la conjetura[3] se requiere de una ecuación representativa de la ecuación funcional ("funcional equation") o función de valor ("value function") (4). La conjetura será $v(k,\theta) = v_0 + v_1 \ln k + v_2 \ln \theta$, con lo cual al reemplazar en la ecuación funcional, y derivar las condiciones de primer orden y la condición de la

[2]Para una revisión profunda del tipo de problemas de programación dinámica, revisar Altug y Labadie (1994), Hansen y Sargent (1993), Sargent (1987), y especialmente Stokey y Lucas (1989).

[3]Revisar Sargent (1987).

envolvente, se obtienen los valores para los parámetros de la ecuación de conjetura v_0, v_1, v_2. La solución para el stock de capital y para el nivel de consumo (las funciones de política o "policy functions" como se conocen en el lenguaje cotidiano de economistas) estarán dadas por:

$$c_t = (1-\alpha\beta)\theta_t k_t^{\alpha}$$
$$k_{t+1} = \alpha\beta\theta_t k_t^{\alpha}$$

Sin embargo, el modelo de crecimiento estocástico propuesto por Taylor y Uhlig (1990) no tiene una solución analítica para el caso en que la función de preferencia no es logarítmica y cuando la depreciación no es total (i.e. $\tau \neq 1, \delta \neq 1$). En este caso, como en la mayoría de las aplicaciones prácticas, uno debe evaluar numéricamente las funciones $[c(k,\theta), k'(k,\theta)]$. Dos métodos de solución serán presentados en la sección 4, el método Linear-Quadratic, y el método de Expectativas Parametrizadas.

3. MODELOS CON DINERO.

En esta sección se presenta un modelo simple de Cash-in-advance (CIA), similar en su estructura al modelo calibrado y simulado por Cooley y Hansen (1989) para USA. En su artículo se demuestra que, considerando el método de simulación utilizado, la introducción del dinero no es capaz de explicar la volatilidad de variables reales como consumo, inversión y empleo, contribuyendo solo a explicar en parte las volatilidades del nivel de precios.

Para comenzar, debido a que no podemos hablar de un equilibrio Pareto Optimo (es decir, esta economía no puede ser resuelta por un planificador social), presentaremos la estructura del modelo completo y posteriormente derivaremos el equilibrio competitivo (CE).

Pensemos una economía monetaria agregada donde existe un agente que deriva sus "policy function" considerando la evolución de ciertas variables claves. El agregado de la economía puede ser resumido por una secuencia de dotaciones $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, y la evolución del stock de dinero $\{M_t\}_{t=0}^{\infty}$. Para caracterizar las leyes de movimiento diremos que existe un vector z_t compuesto de iid variables aleatorias, que resumirá las variables exógenas de la economía agregada que serán relevantes en la toma de decisiones. Este vector z_t puede evolucionar según un proceso markoviano con matriz Π (problema estado-dependiente discreto), o con una función de transición $f(z', z)$ donde $z \in Z$ (caso contínuo).

Asumiremos además que la dotación al igual que la tasa de crecimiento bruto del stock de dinero son variables aleatorias, pero representadas por una función fija, i.e. $y_t = y(z_t)$, $M_{t+1} = g(z_{t+1})M_t$. Las leyes de movimiento para z_t, $y(z_{t+1})$, y $g(z_{t+1})$, nos servirán para caracterizar el comportamiento agregado de la economía.

El modelo considera a una familia compuesta de dos agentes: un comprador y un oferente de trabajo. El oferente de trabajo (o el individuo encargado de recolectar la dotación familiar) sale en la mañana y vuelve en la noche con esa dotación, permitiéndo a la familia disponer de esos recursos para consumo el día siguiente. El comprador utiliza el dinero que se almacenó el día anterior (el cual incluye una trasferencia no anticipada) para ir a adquirir bienes al mercado del producto. Esta familia representativa maximiza el valor esperado de su flujo de utilidades futuras, descontadas por un factor de desccuento β, que está entre 0 y 1, y enfrenta dos restricciones de gasto. La primera es la clásica restricción presupuestaria intertemporal, mientras que la segunda condición señala que el agente comprador de la familia no puede adquirir bienes si no es con dinero.

Asumiendo que los agentes son atomísticos en el mercado de bienes, el modelo CIA se puede representar como:

$$MaxE_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{t+1} &= \hat{M}_t + P_t y_t - P_t c_t \\ \hat{M}_{t+1} &= \widetilde{M}_{t+1} + (g(z_{t+1}) - 1) M_t \\ P_t c_t &\leq \hat{M}_t \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

donde podemos definir:

M_t: stock de dinero de toda la economía,

$\widetilde{M}$: stock de dinero del individuo que desea llevar al próximo período, antes de la transferencia (exceso de saldos monetarios),

$\hat{M}$: cantidad de dinero que el agente desea llevar al próximo período incluída las transferencias (T=(g-1)M).

Asumiendo que el precio relativo del producto en términos del dinero puede representarse como una función invariante de las variables de estado (z,M), i.e. P_t=$P(z_t,M_t)$, y que específicamente se dá homogeneidad de precios con respecto al dinero, i.e. $P_t = p(z_t)M_t$, podemos hacer una reparametrización del modelo y expresarlo en téminos relativos al stock de dinero de la economía M. Dividiendo las restricciones presupuestarias por M_t nos queda:

$$\frac{\widetilde{M}_{t+1}}{M_t} = \frac{\hat{M}_t}{M_t} + \frac{P_t(z_t)y(z_t)}{M_t} - \frac{P_t(z_t)c_t}{M_t}$$

$$\frac{\hat{M}_{t+1}}{M_t} = \frac{\widetilde{M}_{t+1}}{M_t} + (g(z_{t+1}) - 1)$$

$$\frac{P(z_t)c_t}{M_t} \leq \frac{\hat{M}_t}{M_t}$$

$$\Rightarrow \widetilde{m}_{t+1} = \hat{m}_t + p(z_t)y(z_t) - p(z_t)c_t$$

$$\Rightarrow \hat{m}_{t+1} = \frac{\widetilde{m}_{t+1} + g(z_{t+1}) - 1}{g(z_{t+1})}$$

$$\Rightarrow p(z_t)c_t \leq \hat{m}_t$$

Con esta reparametrización, la cual nos permite simplificar el modelo sin cambiar sus implicancias, podemos replantear el problema del agente maximizador (6) como:

$$\begin{aligned}
&Max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \\
&s.a. \\
&\widetilde{m}_{t+1} = \hat{m}_t + p(z_t)y(z_t) - p(z_t)c_t \\
&\hat{m}_{t+1} = \frac{\widetilde{m}_{t+1} + g(z_{t+1}) - 1}{g(z_{t+1})} \\
&p(z_t)c_t \leq \hat{m}_t
\end{aligned} \tag{7}$$

Así, la ecuación funcional (FE) correspondiente al problema del agente (7), puede representarse como:

$$
\begin{aligned}
& v(\hat{m}, z) = \max_{c,\widetilde{m}'} \left\{ U(c) + \beta \int_{z' \in Z} v(\hat{m}', z') f(z', z) dz' \right\} \\
s.a. \quad & \widetilde{m}' = \hat{m} + p(z) y(z) - p(z) c \\
& \hat{m}' = \frac{\widetilde{m}' + g(z') - 1}{g(z')} \\
& p(z) c \leq \hat{m}
\end{aligned}
$$

Explícitamente, puedo incorporar la definición de $\hat{m}'$ en la FE, e incorporar los multiplicadores asociados a las restricciones (λ, φ), con lo cual obtenemos la FE final:

$$
\begin{aligned}
& v(\hat{m}, z) = \max_{c,\widetilde{m}'} \left\{ U(c) + \beta \int_{z' \in Z} v\left(\frac{\widetilde{m}' + g(z') - 1}{g(z')}, z' \right) f(z', z) dz' \right\} \\
& s.a. \\
& \lambda(\hat{m}, z): \quad \widetilde{m}' = \hat{m} + p(z) y(z) - p(z) c \\
& \varphi(\hat{m}, z): \quad p(z) c \leq \hat{m}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Las condiciones de primer orden bienen dadas por las primeras derivadas de la FE con respecto a consumo, dinero deseado para el próximo período, y los dos multiplicadores. Las condiciones de equilibrio son:

$$
\begin{aligned}
(i) \quad & \hat{m} = 1 \quad : \hat{M}_t = M_t \Rightarrow \hat{m} = 1, \forall t \\
(ii) \quad & y_t = c(\hat{m}_t, z_t) = c(1, z_t) \\
(iii) \quad & 1 = L(1, z_t)
\end{aligned}
$$

La primera condición garantiza que el individuo mantiene todo el dinero de la economía, es decir que el promedio per capita de mantención de dinero es igual al promedio mantenido por los agentes. La segunda condición indica que si el agente mantiene todo el dinero de la economía, entonces sus elecciones son consistentes con la economía en el agregado, con lo cual se estaría clareando el mercado de bienes. Por último, (iii) representa la condición de equilibrio en el mercado monetario, donde la demanda por dinero L(.) es igual a la oferta .

La solución al problema de programación dinámica (8) se puede enterder como encontrar el punto fijo de la función $v = Tv$ donde Tv representa el lado derecho de la FE. Para que este problema tenga solución deben darse ciertas condiciones sobre el operador T. Las condiciones de suficiencia y el teorema de existencia de un único punto fijo son planteadas por Blackwell (1965). Este autor identifica como dos las condiciones suficientes para que se de que el operador T sea un "contraction mapping" con modulo β^*. Las condiciones de suficiencia que garantizan la solución a (8) son, primero, que T sea un operador monótono ($u \leq v \Leftrightarrow Tu \leq Tv$), y segundo, que se dé la condición de descuento ($T(v + a) \leq Tv + \beta^* a$)[4]. Si T satisface las propiedades de monotonicidad y de descuento, entonces T será un operador de contracción, con lo cual, utilizando el teorema del punto fijo de Banach[5], T tiene un único punto fijo.

---

[4] Donde $0 < \beta^* < 1$ y "a" es una constante. Esto se explica en los teoremas 3, 4 y 5 en Blackwell (1965), páginas 231-232.

[5] Revisar Stokey y Lucas (1989) o Heuser (1982) en su capítulo I.

Las condiciones de suficiencia de Blackwell son fáciles de demostrar para nuestro problema (8), con lo cual podemos proceder a resolver paras las "policy functions"[6]. De la condición de descuento, se obtiene:

$$\beta^{*} = \beta \int_{z \in Z} \frac{1}{g(z')} f(z', z) dz' < 1 \qquad (*)$$

Económicamente esta condición de descuento está relacionada con el retorno al dinero. El significado del término que se compone en la integral es el valor esperado del inverso de la tasa de crecimiento monetario, la cual se aproxima a la tasa de inflación esperada. Si a esto la multiplicamos por la tasa de descuento subjetiva, que viene a ser la tasa real de interés en estado estacionario, llegamos finalmente a que la expresión al lado derecho de esta última ecuación es la tasa de interés nominal. Es decir, la condición de descuento establece que la tasa de interés nominal debe ser positiva. Si esta condición es violada , entonces la tasa de retorno al dinero será mayor a la tasa de preferencia temporal. Si existiese un activo en el cual se puede invertir que retorne más que la tasa de preferencia, entonces el agente desearía acumular cada vez más de ese activo, con lo cual el consumo y la tenecia de saldos monetarios comenzaría a crecer sin límite.

[6] Además de estas condiciones básicas, se requiere que la solución al punto fijo de $Tv(m^T, z)$ sea una función cóncava. Para demostrar su concavidad, se requiere que T mapee de funciones cóncavas a funciones cóncavas, i.e. $T: v \rightarrow v$, y que T sea un espacio métrico completo. Para una revisión de estos tópicos, ver Heuser (1982), y Stokey y Lucas (1989).

Dado que el nivel de precios es una función estacionaria de un vector de estado exógeno z, esto no sería posible en una economía con soluciones no estacionarias. En este caso el nivel de precios quedaría indeterminado.

Luego, considerando (*) y las condiciones de equilibrio (i)-(iii), podemos escribir las ecuaciones de Euler y la condición de la envolvente para el problema (8):

$$
\begin{aligned}
c:&\quad U'(c(1,z)) - p(z)(\lambda(1,z)+\varphi(1,z)) = 0\\
\widetilde{m}':&\quad \beta\int_{z\in Z}\frac{\partial v(1,z')}{\partial \hat{m}'}\frac{1}{g(z')}f(z',z)dz' - \lambda(1,z) = 0\\
\lambda:&\quad (p(z)y(z)+\hat{m}-p(z)c-\widetilde{m}')\lambda = 0\\
\varphi:&\quad (\hat{m}-p(z)c)\varphi = 0\\
\hat{m}:&\quad \frac{\partial v(\hat{m},z)}{\partial \hat{m}} = \lambda(\hat{m},z)+\varphi(\hat{m},z)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Definiendo $\lambda(z)\equiv\lambda(1,z)$, $\varphi(z)\equiv\varphi(1,z)$, y reordenando (9), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&U'(y(z)) = [\lambda(z)+\varphi(z)]p(z)\\
&\beta\int_{z\in Z}\frac{\partial v(1,z')}{\partial \hat{m}}\frac{1}{g(z')}f(z',z)dz' = \lambda(z)\\
&y(z)p(z)\le 1
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

Incorporando la condición de la envolvente en la segunda ecuación de Euler en (9') se obtiene finalmente un sistema formado por tres ecuaciones y tres incógnitas (p, λ, φ):

$$
\begin{aligned}
&U'(y(z)) = [\lambda(z)+\varphi(z)]p(z)\\
&\beta\int_{z\in Z}\frac{(\lambda(z')+\varphi(z'))}{g(z')}f(z',z)dz' = \lambda(z)\\
&y(z)p(z)\le 1
\end{aligned}
\tag{9''}
$$

Siempre es posible escribir:

$$\lambda(z)+\varphi(z)=Max\{\lambda(z),\lambda(z)+\varphi(z)\}$$

pero incorporando ahora la ecuación de Euler para el consumo, se tiene que:

$$\lambda(z)+\varphi(z)=Max\left\{\lambda(z),\frac{U'(y(z))}{p(z)}\right\}$$

De la restricción CIA sabemos que:

$$\lambda(z)+\varphi(z)=Max\{\lambda(z),y(z)U'(y(z))\} \qquad \textbf{(**)}$$

Ahora, despejando para el nivel de precios p(z) de la ecuación de Euler para el consumo, e incorporando (**), llegamos a la primera ecuación del bloque recursivo. La ecuación para el nivel de precios será:

$$p(z)=Min\left\{\frac{U'(y(z))}{\lambda(z)},\frac{1}{y(z)}\right\} \qquad \textbf{(10.a)}$$

Utilizando (**), y restando λ a cada lado de la ecuación, obtendremos la segunda ecuación recursiva para φ:

$$\varphi(z)=Max\{0,y(z)U'(y(z))-\lambda(z)\} \qquad \textbf{(10.b)}$$

Finalmente obtenemos la ecuación para λ, que será una ecuación en diferencia y de la cual debemos obtener su solución de punto fijo. De la condición de la envolvente y de (**) se obtiene que:

$$\lambda(z)=\beta\int_{z'\in Z}Max\{\lambda(z'),y(z')U'(y(z'))\}\frac{1}{g(z')}f(z',z)dz' \qquad \textbf{(10.c)}$$

El block de ecuaciones (10.a) - (10.c) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se resuelve recursivamente a partir de (10.c). Una vez determinado el valor de $\lambda(z)$, se obtienen simultáneamente las soluciones para $p(z), \varphi(z)$.

La ecuación más importante en resolver es la (10.c). Es posible provar que la función del lado derecho de la ecuación (10.c) cumple con las condiciones de suficiencia de Blackwell con lo cual podremos encontrar un único punto fijo para λ. Utilizando la condición requerida (*), y asumiendo que T es un espacio métrico completo y cóncavo, llegamos a que el valor de equilibrio para λ es[7]:

$$\overline{\lambda}(z) = \beta \int_{z \in Z} \frac{1}{g(z')} f(z', z) dz'$$

Puesto que el multiplicador de la restricción de CIA es positivo, se tiene que la condición es siempre activa con lo cual el gasto total en bienes será igual a la cantidad de dinero que el agente posee. Es así como incorporando esta solución a la ecuación para el nivel de precios llegamos a:

$$p(z) = Min\left\{ \frac{\frac{1}{y(z)}}{\beta \int_{z \in Z} \frac{1}{g(z')} f(z', z) dz'}, \frac{1}{y(z)} \right\}$$

pero como se debe cumplir la condición de descontabilidad (*), llegamos a que el nivel de precios de equilibrio final es:

---

[7] Utilizando el método de "guess" o el método iterativo partiendo desde $\lambda' = 0$.

$$p(z) = \frac{1}{y(z)}$$

Considerando una función de utilidad logarítmica, el valor del multiplicador para la restricción presupuestaria es:

$$\varphi(z) = 1 - \beta \int_{z \in Z} \frac{1}{g(z')} f(z', z) dz'$$

la cual es positiva dado que se debe cumplir la condición de descuento de Blackwell $\beta^* < 1$. Esto indica que la restricción siempre se cumple con igualdad, i.e. está siempre activa.

Con respecto a la solución para λ, que bajo certidumbre sería igual a β/g, en la medida que la tasa de crecimiento (esperada) del dinero se aproxime a la tasa de preferencia temporal cierta β (lo cual quiere decir que la cantidad de dinero esperada estaría disminuyendo causando deflación esperada), la tasa de interés nominal de la economía se aproximará a cero. Al darse esta situación, la CIA ya no sería activa y no sabríamos que ocurriría a esta economía en términos de los valores de equilibrio de las variables.

4. CALIBRACION Y SIMULACION.

En esta sección se presentan dos métodos de simulación ampliamente utilizados en la literatura de simulación y calibración de modelos de ciclos reales. El primero es el método desarrollado por Kydland y Prescott (1982) y McGrattan (1990), el cual se presentará con la metodología empleada por Hansen y Prescott (1995). El segundo método discutido es el de parametrización de expectativas elaborado por den Haan y Marcet (1990) y (1994), y Marcet (1991). Ambas metodologías son de rápida y fácil implementación, donde solamente se requieren nociones de algún lenguaje básico de programación como GAUSS o MATLAB.

4.1. Método Lineal Cuadrático.

Consideremos la siguiente estructura de la economía en términos matriciales, en donde se tiene una función objetivo cuadrática (la cual se linealizará con una expansión de Taylor de segundo orden) y un conjunto de restricciones lineales. A modo de notación, z representa el vector de variables de estado exógenas (e.g. shock tecnológico), ε representa el vector de variables aleatorias distribuídas iid en el tiempo con expectativa condicional cero y varianza finita ($E[\varepsilon]=0, V[\varepsilon]<\infty$), s representa el vector de variables de estado endógenas (e.g. stock de capital), d es el vector de variables de decisión (e.g. consumo, horas de trabajo ofrecida, inversión, etc.), mientras que A, B representan funciones lineales.

Con esta estructura de notación podemos representar el problema de programación dinámica (DPP) del agente como:

$$\begin{aligned}
&v(z,s)=\max_{d}\left\{r(z,s,d)+\beta E\left[v(z',s')\middle|z\right]\right\}\\
&\quad s.a.\\
&\qquad\qquad z'=A(z)+\varepsilon'\\
&\qquad\qquad s'=B(z,s,d)
\end{aligned} \tag{11}$$

donde r(z,s,d) es la función de retorno (i.e. la función de utilidad a maximizar), y v(z,s) representa la función de valor óptima del problema. Las ecuaciones que restringen a la función de valor conforman las leyes de movimiento para el vector de variables de estado exógenas y endógenas (z',s') del modelo, las cuales se representan por ecuaciones lineales.

Consireremos la aplicación de esta estructura al modelo básico de crecimiento en una economía sin dinero (sin distorciones) con retornos constantes a la escala y agentes homogéneos. Aquí el agente representativo debe decidir el nivel de consumo, la cantidad de horas trabajadas, y el nivel de inversión o stock de capital para el próximo período. El DPP del agente se representa por:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, l_t), \qquad \beta \in (0,1) \\
&\text{s.a.} \qquad\qquad h_t + l_t = 1 \\
&\qquad\qquad\qquad y_t = z_t \cdot F(k_t, h_t), \qquad \text{F: CRS} \\
&\qquad\qquad\qquad z_{t+1} = A(z_t) + \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon \to \text{iid}\left(0, \sigma^2 < \infty\right) \\
&\qquad\qquad\qquad y_t = c_t + i_t \\
&\qquad\qquad\qquad k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t
\end{aligned}
\tag{12}
$$

El método de solución comienza por eliminar alguna restricción introduciéndola directamente dentro del DPP. Utilizando la condición de equilibrio de mercado (y=c+i), y la restricción de dotación total de horas, podemos reemplazar consumo y trabajo en la función de retorno por $c_t = z_t F(k_t, h_t) - i_t$, y $l_t = 1 - h_t$, con lo cual la función de retorno se transforma en $r(z,s,d) = r(z,k,(h,i)) = U(zF(k,h) - i, 1 - h)$. A su vez, la ley de movimiento para la variable de estado endógena k es: $s' = B(z,s,d) = B(z,k,h,i) = k' = (1-\delta)k + i$.

La solución consiste en encontrar una representación explícita para la "policy function" de la forma $d_t = d(z_t, s_t)$. Para esto, lo primero que debemos hacer es obtener una aproximación cuadrática a la función de retorno r en torno a la solución de estado estacionario[8]. Si denotamos por $\eta(x)$ la dimensión de un vector columna, entonces la solución del estado estacionario $\bar{z}, \bar{s}, \bar{d}$ requerirá de resolver un sistema de $\eta(z, s, d)$ equaciones.

Estado Estacionario y Aproximación Cuadrática.

Para resolver el estado estacionario, se resuelve el sistema de ecuaciones por bloque. Partiendo por la ley de movimiento para la variable de estado exógena, se requiere que el valor de las variables aleatorias se iguale a su valor de expectativa condicional, lo cual en nuestro caso es que se resuelva el sistema $\bar{z} = A(\bar{z})$ para el punto fijo $\bar{z}$. Una vez conocido $\bar{z}$, se procede a resolver para el sistema:

$$\begin{gathered}\frac{\partial r(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})}{\partial d} + \beta \frac{\partial r(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})}{\partial s} \cdot \left(I - \beta \frac{\partial B(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})}{\partial s} \right)^{-1} \frac{\partial B(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})}{\partial d} = \vec{0} \\ \bar{s} = B(\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})\end{gathered} \tag{13}$$

donde, dada la estructura del modelo, sabemos la forma explícita de las funciones de retorno r y la función para la ley de movimiento B de la variable de estado endógena k'. De esta manera llegamos a que el sistema (13) se traduce a:

[8] El estado estacionario se denotará por una barra arriba de la variable.

$$\begin{bmatrix} U_c z F_h - U_l \\ -U_c \end{bmatrix} + \beta U_c z F_k \cdot \left(I_{(2)} - \beta(1-\delta)\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(13')}$$
$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \bar{i}$$

Una vez resuelto el sistema (13′) para el estado estacionario, se procede a tomar la expansión de Taylor a la función de retorno $r(z,s,d) \equiv r(y)$ en torno a $\bar{y} \equiv (\bar{z}, \bar{s}, \bar{d})$. La expansión de Taylor de segundo orden[9] será:

$$\tilde{r}(y) = r(\bar{y})_{[1\times 1]} + \left[\left. \frac{\partial r(y)^T}{\partial y} \right|_{y=\bar{y}} \right]_{[1\times \eta(y)]} \cdot (y-\bar{y})_{[\eta(y)\times 1]} + \frac{1}{2} \cdot (y-\bar{y})^T_{[1\times \eta(y)]} \cdot \left[\left. \frac{\partial^2 r(y)}{\partial y^2} \right|_{y=\bar{y}} \right]_{[\eta(y)\times \eta(y)]} \cdot (y-\bar{y})_{[\eta(y)\times 1]}$$

Esta aproximación por expansión nos permite finalmente reescribir el problema de programación dinámica en su forma lineal-cuadratica (L-Q), la cual nos servirá de base para desarrollar el algoritmo de solución para las "policy functions":

$$\begin{aligned} & v(z,s) = \max_d \left\{ y^T Q y + \beta E\left[v(z',s') \middle| z \right] \right\} \\ & \text{s.a.} \\ & \qquad z' = A(z) + \varepsilon' \\ & \qquad s' = B(z,s,d) \end{aligned} \qquad \textbf{(14)}$$

donde $r(z,s,d)_{[1\times 1]} \xrightarrow[\text{aprox}]{} \left[y^T Q y \right]_{[1\times 1]}$.

Ahora estamos en condiciones de emplear el método de aproximaciones sucesivas, iterando sobre la función de valor, de manera de obtener las funciones de política.

---

[9] Se toma una expansión de segundo orden de manera de obtener funciones lineales una vez optimizado el sistema (derivando las ecuaciones de Euler).

Iterando la Función de Valor.

Para resolver el DPP por aproximaciones sucesivas de la función de valor, planteamos el sistema (14) para el caso de certidumbre, pero considerando la diferencia de la función de valor en cada iteración de la secuencia convergente:

$$
\begin{aligned}
& v^{n+1}(z,s) = \max_{d}\left\{ y^T Q y + \beta v^n(z',s') \right\} \\
& s.a. \\
& \qquad z' = A(z) \\
& \qquad s' = B(z,s,d)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(14')}
$$

En la práctica podemos distingir siete etapas en este proceso de iteración, las cuales iremos presentando paso a paso para el problema específico planteado en (12). Lo único que nos queda por definir es la ley de movimiento para el shock tecnológico. Con este fin, asumamos que z sigue el siguiente proceso autoregresivo de primer orden, donde θ es un valor predefinido:

$$
z' = \theta z + \varepsilon' \qquad \textbf{(15)}
$$

Terminado el planteamiento del problema, pasamos a la especificación de las etapas. En el paso 1 debemos definir una matriz v^0 para comenzar la iteración.

<u>Paso 1</u>. Definir v^0

$$
v^0 = I_{[\eta(z,s)]} * (-1) = -I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(paso 1)}
$$

<u>Paso 2</u>. Construir la matriz de reducción $R^{[\eta(x)]}$, predefiniendo a x como un vector concatenado verticalmente de los vectores (y,z',s'). Osea para nuestro problema $x^T = \left[1\; z\; k\; h\; i\; 1\; z'\; k'\right]$.

$$R^{[\eta(x)]} = R^{[8]} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{[\eta(y)]} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \beta \cdot v^n\big|_{[\eta(z,s)]} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right]_{[\eta(x)]} \qquad \textbf{(paso 2)}$$

La idea es ir eliminando consecutivamente las variables de control (d) y las variables de estado endógenas y exógenas del siguiente período, utilizando ya sea las restricciones o las condiciones de primer orden, según corresponda.

El proceso reductivo consiste en generar una nueva matriz R de orden menor una vez incluídas las restricciones, de manera de obtener finalmente una matriz R de orden similar a la matriz v^0 original (v^n).

Para esto definimos:

$$R^{[j-1]} \equiv \Psi^T R^{[j]} \Psi$$

donde la matriz Ψ está definida por:

$$\Psi \equiv \left[\begin{array}{ccccc} & & I_{[j-1]} & & \\ \hline \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \cdots & \psi_{j-1} \end{array}\right]_{[j\times(j-1)]}$$

De esta manera, para nuestro modelo particular, la primera matriz de reducción R^7 sería:

$$R^{[\eta(x)-1]} = R^{[7]} \equiv \left[\begin{array}{c:c} & \psi_1 \\ & \psi_2 \\ & \cdot\cdot \\ I_{[7]} & \cdot\cdot \\ & \cdot\cdot \\ & \cdot\cdot \\ & \psi_7 \end{array}\right]_{[7\times 8]} \cdot \left[\begin{array}{ccccc:ccc} & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{[5]} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \beta v'' & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right]_{[8\times 8]} \cdot \left[\begin{array}{ccccccc} & & & I_{[7]} & & & \\ \hdashline \psi_1 & \psi_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \psi_7 \end{array}\right]_{[8\times 7]}$$

__Paso 3__. En esta etapa eliminamos s' y z' (i.e. k', 1, z'). Especificando aún más, como la variable que estamos reduciendo es k', debemos incorporar la ley de movimiento para el stock de capital para eliminar k', de modo que la matriz Ψ queda:

$$\Psi \equiv \left[\begin{array}{c:c} & 0 \\ & 0 \\ & (1-\delta) \\ I_{[7]} & 0 \\ & 1 \\ & 0 \\ & 0 \end{array}\right]_{[7\times 8]}$$

Una manera rápida de definir los parámetros de la matriz Ψ es utilizando la expresión:

$$x_m = \sum_{j \le [\eta(z,s,d)]} \psi_{(m,j)} \cdot x_j \tag{16}$$

donde $m = \eta(z,s,s)+1,\ldots,\eta(x)$. Para el caso de eliminar k', (16) se expande a:

$$x_m = \sum_{j \leq [\eta(z,s,d)]} \psi_{(m,j)} \cdot x_j$$

$$x_8 = \sum_{j \leq [5]} \psi_{(8,j)} \cdot x_j$$

$$\Rightarrow s' \equiv k' = 0 \cdot 1 + 0 \cdot z + (1-\delta) \cdot k + 0 \cdot h + 1 \cdot i + 0 \cdot 1 + 0 \cdot z' = (1-\delta)k + i$$

Ahora procedería eliminar z' utilizando el proceso autoregresivo generador del shock tecnológico (15). Utilizando (16) se tiene:

$$R^{[6]} = \left[\begin{array}{c:c} & 0 \\ & \theta \\ I_{[6]} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{array} \right]_{[6\times 7]} \cdot \left[R^{[7]} \right]_{[7\times 7]} \cdot \left[\begin{array}{cccccc} & & I_{[6]} & & & \\ \hdashline 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{[7\times 6]}$$

Eliminar 1 es similar. Sabiendo que $x_6 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot k + 0 \cdot h + 0 \cdot i + 0 \cdot 1 + 0 \cdot z' + 0 \cdot k'$, diremos que:

$$R^{[5]} = \left[\begin{array}{c:c} & 1 \\ & 0 \\ I_{[5]} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{array} \right]_{[5\times 6]} \cdot \left[R^{[7]} \right]_{[6\times 6]} \cdot \left[\begin{array}{ccccc} & & I_{[5]} & & \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{[6\times 5]}$$

<u>Paso 4</u>. En esta etapa procede eliminar $\eta(d) \equiv \eta(h,i)$ variables de control del sistema. Para este fin ocupamos las condiciones de primer orden linealizadas por la siguiente expresión:

$$x_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{R^{[m]}_{(m,j)}}{R^{[m]}_{(m,m)}} \right) \cdot x_j \,, \qquad m = \eta(z,s)+1, \ldots, \eta(z,s,d)$$

Así, para d=h,i procedemos a reducir R considerando los factores ψ_m de aplicar la expresión anterior a las variables de control i,h. Para inversión i se tiene:

$$x_5 = -\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{R^{[5]}_{(5,j)}}{R^{[5]}_{(5,5)}}\right)\cdot x_j = -\left(\frac{R^{[5]}_{(5,1)}}{R^{[5]}_{(5,5)}}\right)\cdot x_1 - \left(\frac{R^{[5]}_{(5,2)}}{R^{[5]}_{(5,5)}}\right)\cdot x_2 - \left(\frac{R^{[5]}_{(5,3)}}{R^{[5]}_{(5,5)}}\right)\cdot x_3 - \left(\frac{R^{[5]}_{(5,4)}}{R^{[5]}_{(5,5)}}\right)\cdot x_4$$
$$\Rightarrow i = \psi_{i1}\cdot 1 + \psi_{i2}\cdot z + \psi_{i3}\cdot k + \psi_{i4}\cdot h$$

con lo cual se tiene que la matriz de reducción será:

$$R^{[4]} = \left[\begin{array}{c:c} I_{[4]} & \begin{matrix} -\dfrac{R^{[5]}_{(5,1)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} \\ -\dfrac{R^{[5]}_{(5,2)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} \\ -\dfrac{R^{[5]}_{(5,3)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} \\ -\dfrac{R^{[5]}_{(5,4)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} \end{matrix} \end{array}\right]_{[4\times 5]} \cdot R^{[5]}{}_{[5\times 5]} \cdot \left[\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{I_{[4]}} \\ \hdashline -\dfrac{R^{[5]}_{(5,1)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} & -\dfrac{R^{[5]}_{(5,2)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} & -\dfrac{R^{[5]}_{(5,3)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} & -\dfrac{R^{[5]}_{(5,4)}}{R^{[5]}_{(5,5)}} \end{array}\right]_{[5\times 4]}$$

Para el caso de h se tiene que:

$$x_4 = -\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{R^{[4]}_{(4,j)}}{R^{[4]}_{(4,4)}}\right)\cdot x_j = -\left(\frac{R^{[4]}_{(4,1)}}{R^{[4]}_{(4,4)}}\right)\cdot x_1 - \left(\frac{R^{[4]}_{(4,2)}}{R^{[4]}_{(4,4)}}\right)\cdot x_2 - \left(\frac{R^{[4]}_{(4,3)}}{R^{[4]}_{(4,4)}}\right)\cdot x_3$$
$$\Rightarrow h = \psi_{h1}\cdot 1 + \psi_{h2}\cdot z + \psi_{h3}\cdot k$$

con lo cual se tiene que la matriz de reducción respectiva estará dada por:

$$R^{[3]} = \left[\begin{array}{c|c} I_{[3]} & \begin{array}{c} -\dfrac{R^{[4]}_{(4,1)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} \\ -\dfrac{R^{[4]}_{(4,2)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} \\ -\dfrac{R^{[4]}_{(4,3)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} \end{array} \end{array} \right]_{[3\times 4]} \cdot R^{[4]}{}_{[4\times 4]} \cdot \left[\begin{array}{ccc} & I_{[3]} & \\ \hline -\dfrac{R^{[4]}_{(4,1)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} & -\dfrac{R^{[4]}_{(4,2)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} & -\dfrac{R^{[4]}_{(4,3)}}{R^{[4]}_{(4,4)}} \end{array} \right]_{[4\times 3]}$$

Paso 5. Verificar Convergencia. En esta etapa se chequea si la matriz reducida converge en norma en el tiempo bajo algún criterio de tolerancia. Para esto se define $v^{n+1} \equiv R^{[\eta(z,s)]} = R^{[3]}$. Chequeamos si $\left\| v^{n+1} - v^{n} \right\| \leq \hbar$, donde $\hbar$ es la tolerancia[10] exigida en la convergencia. Si se cumple que la diferencia es menor que la tolerancia entonces pasamos al paso 6, y en caso contrario nos vamos al paso 2 definiendo ahora $v^{n} \xleftarrow[\text{REEMPLAZA}]{} v^{n+1} \equiv R^{[\eta(z,s)]} = R^{[3]}$.

Paso 6. Obtenemos las funciones de política. Una vez satisfecho el criterio de convergencia de la matriz de valor, definimos la siguiente expresión como función resultado de política para el agente representativo:

$$d_j = \sum_{i<\phi} -\frac{R^{(\phi)}_{\phi i}}{R^{(\phi)}_{\phi\phi}} \cdot x_i \,, \qquad j = 1, \ldots \eta(d)\,, \phi = \eta(z,s) + j$$

En nuestro caso particular, $\phi = 5$ y j=1,2, con lo cual las funciones de decisión d_1=h, y d_2=i, se obtendrán de las condiciones de primer orden utilizadas en el paso 4 considerando el valor de la matriz R de la última iteración.

[10] Generalmente este valor es lo suficientemente pequeño como $1.0e^{-8}$.

La ecuación para la variable empleo d_1=h viene expresada en términos de las variables de estado **z,k**, sin embargo la ecuación para d_2=i tine como argumento a **h**. Para expresar inversión como función de las mismas variables de estado. Una vez ejecutado el paso 7, estas ecuaciones (dos en nuestro caso) nos servirán para simular el modelo y determinar si este es validado al contrastar sus implicancias estadísticas con los datos actuales de la economía.

Paso 7. Comparación de steady-states. La última etapa consiste en determinar si el algorítmo está bien escrito en su parte determinística. Utilizando las funciones de política obtenidas en el paso 6, reemplazamos en los valores de las variables de estado exógenas sus respectivos valores estacionarios y comparamos este resultado con los calculados en la construcción de la matriz de aproximación Q. Si existen diferencias (usualmente al quinto o sexto decimal) entonces debemos incrementar nuestro nivel de tolerancia y/o revisar el código, pues esto es un indicador de que algo anda mal.

Simulación de las Series.

Esta es la etapa final del método de aproximación lineal cuadrático, y consiste en la generación de las variables de estado endógenas y de control del modelo. Utilizando las leyes de movimineto de las variables de estado exógenas (**z**), y un nivel inicial para las variables de estado endógenas, procedemos a simular las series requeridas.

En nuestro modelo simple partimos con un nivel de stock de capital igual a su valor de estado estacionario, lo cual junto al shock tecnológico nos ayudará a determinar el nivel de inversión y de horas ofrecidas de trabajo. De aquí obtenemos consumo, producto, y el nuevo stock de capital, el cual a su vez, por medio de las funciones de política, nos servirá para determinar nuevamente los niveles de inversión y horas de trabajo. Este proceso termina dependiendo del número de simulaciones que se hayan determinado hacer. Finalmente tendremos secuencias para todas las variables de nuestro interés dentro del modelo, i.e. $\{k_t\}_{t=0}^{T}, \{i_t\}_{t=0}^{T}, \{h_t\}_{t=0}^{T}, \{c_t\}_{t=0}^{T}, \{y_t\}_{t=0}^{T}$.

4.2. Método de Parametrización de Expectativas de Marcet.

Este método consiste basicamente en la aproximación de la expectativa condicional de la ecuación de Euler utilizando un polinomio de orden finito $P_n(x)$ para el vector x. Reescribamos el modelo (1) incorporando ahora la ley de movimiento para el progreso técnológico:

$$\underset{\{c,k'\}}{\text{Max}}\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau}$$

$$s.a. \qquad c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = \theta_t k_t^{\alpha} \qquad \textbf{(6)}$$

La condición de primer orden para el stock de capital determinará la ecuación de Euler que el método de parametrización de expectativas debe ajustar. La condición de primer orden para el stock de capital es:

$$c_t^{-\tau} = \beta E\left[c_{t+1}^{-\tau}\left(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\theta_{t+1} + (1-\delta)\right)\middle| \mathrm{I}_t\right]$$

Dado que la expectativa condicional de la ecuación de Euler es una función de las variables de estado (k_t, θ_t), este método sustituirá la expectativa condicional por un polinomio de orden finito (usualmente de orden dos o tres) con lo cual la expresión de Euler se transformaría a:

$$c_t^{-\tau} = \beta\Psi\left(k_t, \theta_t; \varphi_f\right)$$

donde la forma funcional del polinomio Ψ y el vector de parámetros del polinomio φ_f, se escogerán de manera de minimizar el error de predicción correspondiente, el cual está dado por:

$$\xi_t = \beta \cdot c_{t+1}^{-\tau}\left(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\theta_{t+1} + (1-\delta)\right) - c_t^{-\tau}$$

El procedimiento deja claro que la clave está en definir apropiadamente la forma funcional y el vector de parámetros que determinan el orden de esta forma funcional polinómica.

Determinación de la Forma Funcional y del Vector de Parámetros.

Aquí se aproxima la función Ψ por un polinomio[11] al cual se puede ir incrementando el orden de manera de ajustarse mejor a la expectativa condicional a la cual trata de asemejarse[12]. Un polinomio candidato es el polinomio a la potencia, el cual cumple con el requisito de que mapea a los argumentos de $\Re_{+}^{2} \rightarrow \Re_{+}$. Para el caso de polinomios de primer, segundo y tercer orden, esta forma funcional puede representarse en forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \exp^{\left(P_1(x)\right)} \\ \exp^{\left(P_2(x)\right)} \\ \exp^{\left(P_3(x)\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp^{\left(P_1(\log k_t, \log\theta_t)\right)} \\ \exp^{\left(P_2\left(\log k_t, \log\theta_t, \log k_t^2, \log\theta_t^2, \log k_t\theta_t\right)\right)} \\ \exp^{\left(P_3\left(\log k_t, \log\theta_t, \log k_t^2, \log\theta_t^2, \log k_t\theta_t, \log k_t^3, \log\theta_t^3, \log k_t^2\theta_t, \log k_t\theta_t^2\right)\right)} \end{bmatrix}$$

Esto indica que para aproximar la función Ψ por un polinomio de orden 1, entonces requerimos de la estimación de tres parámetros $\varphi_f^{(1)} = \left[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3\right]'$. El primer parámetro es la constante, mientras los dos parámetros adicionales surgen de los factores que acompañan al stock de capital y al shock tecnológico. Para el caso de un polinomio de orden dos, debemos adicionalmente estimar los parámetros que acompañan al cuadrado del stock de capital, al cuadrado del shock tecnológico, y a la multiplicación del stock de capital con el shock tecnológico, i.e. un total de seis parámetros

---

[11] Para un tratamiento básico de interpolación polinómica ver Atkinson (1993) ó (1989).

[12] Den Haan y Marcet (1994) plantean un procedimiento para determinar el orden correcto del polinomio y además presentan un test para determinar el performance de la solución numérica utilizada.

$\varphi_f^{(2)} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6]'$. Para el polinomio de tercer orden, debemos estimar un total de diez parámetros.

El método consiste en cuatro etapas iterativas de fácil implementación computacional para un modelo pequeño como el descrito.

Paso 1. Generar el shock. Generar una serie larga de progreso tecnológico a partir de su ley de movimiento, y considerando errores iid de una normal con media cero y varianza constante y finita.

Paso 2. Generar las series. Escoger el orden del polinomio n (e.g. dos) y definir los parametros iniciales del proceso iterativo $\varphi_0^{(2)} = \left[\varphi_1^{(0)} \quad \varphi_2^{(0)} \quad \varphi_3^{(0)} \quad \varphi_4^{(0)} \quad \varphi_5^{(0)} \quad \varphi_6^{(0)}\right]'$.

Con este vector de parámetros calculamos $\left\{c_t\left(\varphi_f^{(0)}\right), k_t\left(\varphi_f^{(0)}\right)\right\}_{t=1}^{T}$.

Paso 3. Estimar por NLLS el vector de parámetros. Aquí estimamos el vector de parámetros $\varphi_o^{(2)}$ utilizando minimos cuadrados no lineales, regresionando la siguiente ecuación:

$$c_{t+1}^{-\tau}\left(\theta_{t+1}\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) = \Psi_0^{(2)} = \exp\left(\varphi_1 + \varphi_2 \log k_t + \varphi_3 \log\theta_t + \varphi_4(\log k_t)(\log\theta_t) + \varphi_5 \log k_t^2 + \varphi_6 \log\theta_t^2\right)$$

Paso 4. Convergencia. Los parámetros estimados definen una función $S(\varphi_0)$ la cual nos permite hacer un update de nuestros parámetros siguientes por medio del siguiente método iterativo[13]:

---

[13] Este mecanismo de actualización de los parámetros tiene ventajas en lo que respecta a su implemantación computacional, sin embargo no garantiza una convergencia uniforme (de echo es del tipo zig-zag) hacia el vector de parámetros óptimos. Otro tipo de algorítmos no lineales robustos como el de redes neuronales y el de algorítmos genéticos están siendo estudiados para este tipo de modelos en Johnson (1995).

$$\varphi_j = (1-\lambda)\cdot\varphi_{j-1} + \lambda\cdot S(\varphi_{j-1})$$

para j=1,2,3,..., y considerando un parámetro de velocidad de convergencia λ entre cero y uno[14].

El criterio de convergencia consiste en comparar los vectores φ_j y $S(\varphi_j)$ por medio de alguna norma. Específicamente se puede utilizar $d(\varphi_j, S(\varphi_j)) \equiv \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{ij} - S(\varphi_{ij})\right|^{p}\right)^{1/p}$, o también $d(\varphi_j, S(\varphi_j)) \equiv \max_{i=1}^{n}\left|\varphi_{ij} - S(\varphi_{ij})\right|$. Si el criterio de convergencia es satisfecho entonces se para, en caso contrario volvemos al paso 2, reemplazando el antiguo vector de parámetros por el nuevo vector de parámetros estimado por NLLS.

5. CONCLUSIONES.

El presente artículo tiene por objeto presentar dos de las técnicas fundamentales utilizadas por algunos investigadores en la simulación de modelos de expectativas racionales: el método de aproximación lineal cuadrática y el método de parametrización de expectativas. Para cada método se presenta el algorítmo completo de solución, perimitiéndole al lector una fácil y rápida implementación en el computador.

REFERENCIAS.

---

[14] Es común que en modelos simples el valor del coeficiente de velocidad de convergencia sea igual a uno, sin embargo en modelos más extensos es aconsejable utilizar un coeficiente menor como de 0.5.

Atkinson, Kendall (1993). *Elementary Numerical Analysis*, 2nd edición, Wiley, New York.

______________ (1989). *An Introduction to Numerical Analysis,* Wiley, New York.

Benveniste, L. M., y J. A. Scheinkman (1979). "On the Differenciability of the Value Function in Dynamic Models of Economics", *ECONOMETRICA* 3 (727-732).

Blackwell, David (1965). "Discounted Dynamic Programming", *Annals of Mathematical Statistics*, 36 (226-235).

Cooley, T. F. (1995). *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton U. Press.

Cooley, T. F., y G. D. Hansen (1989). "The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model", *American Economic Review*, 79 (733-748).

Den Hann, W., y A. Marcet (1990). " Solving the Stochastic Growth Model by Parameterizing Expectations", *Journal of Business and Economic Statistics* 8 (31-34).

______________________ (1994). "Accuracy in Simulations", *Review of Economic Studies*, 61 (3-17).

Hansen, Gary D. y Edward C Prescott (1995). "Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models", en Thomas F. Cooley (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, capítulo 2.

Hansen, Lars P. y Thomas J. Sargent (1993). *Recurvive Linear Models of Dynamic Economies*, mimeo.

Heuser, Harro G. (1982). *Functional Analysis*, Wiley&Sons.

Johnson, Christian (1994). "A Simple RBC Model of Money and Taxes", *Revista Análisis Económico*, Noviembre.

______________ (1995). "NNETS and GA Optimization: an Application to the RBC Model", en preparación para presentar en el primer encuentro mundial de Algorítmos Genéticos, Stanford University, California, USA.

Kydland, F. E. (1989). "The Role of Money in a Business Cycle Model", Institute for Empirical Macroeconomics, DP 23, FRB of Minneapolis and U. of Minnesota.

Kydland, F.E., y E.C. Prescott (1982). "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *ECONOMETRICA* 50 (1345-70).

_______________ (1991). "The Econometrics of General Equilibrium Approach to Business Cycles", *Scandinavian Journal of Economics*, 93:2 (161-178).

_______________ (1994). "The Computational Experiment: An Econometric Tool", *Working Paper* 9420, FRB of Cleveland, diciembre.

Marcet, Albert (1991). "Solving Non-Linear Stochastic Models by Parameterizing Expectations: An Application to Asset Pricing with Production" (manuscrito, Universitat Pompeu Fabra, y GSIA, Carnegie Mellon University).

McGrattan, Ellen R. (1990). "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8 (41-44).

_______________ (1994). “A Note on Computing Competitive Equilibria in Linear Models”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18 (149-160).

Sargent, Thomas J. (1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard U. Press.

Stokey, N. L. y Robert E. Lucas, Jr. con Edward C. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard U. Press.

Taylor, John B., y Harld Uhlig (1990). "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8 (1-17).